

Topologie II

Dozent: Prof. Dr. Jens Hornbostel

SS 2008 - Uni Bonn

Inhaltsverzeichnis

0	Wiederholung und Ausblick	2
1	Simplizialkomplexe	2
2	Kettenkomplexe und Homologie	3
3	Simpliziale Homologie	7
4	Simpliziale Mengen	7
5	Singuläre Homologie	7
6	H_1 und π_1	7
7	Homotopieinvarianz der singulären Homologie	7
8	Relative singuläre Homologie und zwei Sätze	7
9	Baryzentrische Unterteilung und der fehlende Beweis	8
10	Erste Anwendung der singulären Homologie	9

0 Wiederholung und Ausblick

1 Simplicialkomplexe

Definition 1.1. Seien $x_0 \dots x_q \in \mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage (d.h. $\{x_0 - x_1, \dots, x_0 - x_q\}$ ist linear unabhängig), dann heißt die Punktmenge $\sigma := \sigma_q := \sigma(x_0 \dots x_q) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \text{ mit } \lambda_i > 0 \forall i \in \{0, \dots, q\}, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$ das (offene) q -Simplex mit $x_0 \dots x_q$ als Ecken. Abgeschlossen analog. Der topologische Raum σ bzw. $\bar{\sigma}$ ist unabhängig von der Reihenfolge der x_i , die Koeffizienten λ_i heißen baryzentrische Koordinaten von x bezüglich x_0, \dots, x_q .

TODO:
Fußnote

Beispiel 1.2. $q = 0$ x_0 ist ganzer Simplex und $\sigma_0 = \bar{\sigma}_0$
 $q = 1$

TODO:
Bilder

Beachte:

- $\bar{\sigma}_q \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, hingegen ist $\sigma_q \subset \mathbb{R}^n$ nur für $q = n$ offen.
- Die Ecken sind bis auf Permutation durch $\sigma_q \subset \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmt.

Definition 1.3. Seien $\sigma, \tau \subset \mathbb{R}^n$ Simplizes. Falls alle Ecken von τ auch Ecken von σ sind so heißt τ eine Seite von σ . Man schreibt $\tau \leq \sigma$. Gilt ausserdem $\sigma \neq \tau$ so heißt τ eigentliche Seite von σ . Man schreibt $\tau < \sigma$.

Beispiel 1.4. Der Simplex $\sigma_2 = (x_0, x_1, x_2)$ hat folgende Seiten:

$$\emptyset, (x_0), (x_1), (x_2), (x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_1, x_2), (x_0, x_1, x_2)$$

Definition 1.5. Simplizialkomplex Ein (endlicher) Simplizialkomplex K in \mathbb{R}^n ist eine endliche Menge von Simplizes mit folgenden Eigenschaften

- $\sigma \in K$ und $\tau < \sigma \Rightarrow \tau \in K$
- $\sigma, \tau \in K$ und $\sigma \neq \tau$ so gilt $\sigma \cup \tau = \emptyset$

Beispiel 1.6. $dim=1$

TODO:
Bild

Definition 1.7. Sei K ein Simplizialkomplex in \mathbb{R}^n . Dann ist

$$|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

als Vereinigung von Unterräumen des \mathbb{R}^n mit der Unterraumtopologie die Realisierung von K . Topologische Unterräume des \mathbb{R}^n heißen Polyeder, falls sie von der Form $|K|$ sind für ein geeignet gewähltes K . Ist X ein topologischer Raum mit $X \approx |K|$ so heißt K Triangulierung von X .

Bemerkung 1.8. *Man kann zeigen, dass alle glatten kompakten Mannigfaltigkeiten und alle topologischen kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 und weniger triangulierbar sind.*

Sei K ein Simplizialkomplex. Enthält K einen q -Simplex, aber keinen r -Simplex für $r > q$, so setze $\dim(K) = q$. Die $q+1$ Ecken eines q -Simplexes σ_q lassen sich auf $(q+1)!$ Arten anordnen.

Definition 1.9. a) *Zwei Anordnungen der Ecken von σ_q heißen äquivalent, wenn sie durch eine gerade Permutation auseinander hervorgehen*

b) *Eine Orientierung von σ_q ist eine Äquivalenzklasse von Anordnungen. Wir schreiben $\langle x_0 \dots x_q \rangle$ für den orientierten q -Simplex also das q -Simplex mit einer gewählten Orientierung. Jeder 0-Simplex kann auf genau eine Weise orientiert werden und jeder q -Simplex (mit $q \geq 1$) auf zwei Arten. Eine Orientierung von σ_q induziert eine Orientierung auf allen seinen Seiten σ_{q-1} durch die Wahl eines Repräsentanten der Orientierung der Form $\langle x, x_1, \dots, x_q \rangle$ wobei $x \notin \sigma_{q-1}$.*

c) *Jede gerade Permutation der Ecken von σ_q , die x fest läßt ist auch eine gerade Permutation der Ecken von σ_{q-1} .*

Definition 1.10. *Sei K ein Simplizialkomplex mit Ecken z_0, \dots, z_r . Für $q \in \mathbb{Z}$ sei $C_q(K)$ die q -Ketten-Gruppe von K , wie folgt definiert:*

$$C_q(K) := 0 \quad \forall q < 0$$

$$C_0(K) := \mathbb{Z} \langle z_0, \dots, z_n \rangle \quad (\text{die von den Ecken erzeugte freie abelsche Gruppe})$$

$$C_q(K) := \mathbb{Z} \langle \text{orientierte } q\text{-Simplizies von } K \rangle / \sim$$

Es gilt für den orientierten Simplex $\sigma_q = -\sigma_q^{-1}$ wobei σ_q^{-1} der Simplex σ_q mit entgegengesetzter Orientierung ist.

Beispiel 1.11. *Sei*

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 x_2 \\
 \bullet \\
 \diagup \quad \diagdown \\
 \bullet \quad \bullet \\
 x_0 \quad x_1
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 C_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\
 C_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \sim \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\
 C_2(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \sim \cong \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Wir werden im folgen Abbildungen $C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ definieren, sogenannte Randabbildungen oder Differentiale und mit deren Hilfe die sogenannte Homologiegruppe von K . Hierzu verwenden wir Methoden der homologischen Algebra.

2 Kettenkomplexe und Homologie

Wir betrachten nun einen fest gewählten assoziativen Ring mit Eins R und die Kategorie R-Mod der (Links-)R-Moduln und R-linearen Abbildungen, z.B. $R =$

\mathbb{Z} und $\underline{\mathbb{Z}\text{-Mod}} = \underline{\text{Ab}}$. Nahezu alle folgenden Definitionen und Sätzen lassen sich auf sogenannte „abelsche Kategorien“ verallgemeinern. (Und nach dem Einbettungssatz von Freyd-Mitchell ist jede kleine abelsche Kategorie eine volle exakte Unterkategorie von $\underline{R\text{-Mod}}$ für geeignet gewähltes R).

Referenz: [C. Weibel - An instruction to homological algebra][2]

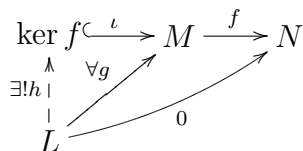
Konvention: Im Folgenden sind alle Objekte R -Moduln und alle Abbildungen R -linear.

Definition 2.1. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung von R -Moduln, dann gilt

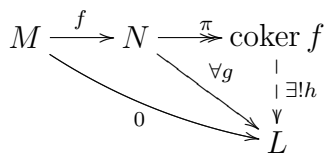
- a) $\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0 \in N\}$ ist der Kern von f und es gibt einen kanonischen Monomorphismus $\iota : \ker f \hookrightarrow M$
- b) $\text{coker } f = N/\text{im } f$ ist der Kokern von f und es gibt einen kanonischen Epimorphismus $\pi : N \rightarrow \text{coker } f$
- c) Hierbei ist $\text{im } f := \{n \in N \mid \exists m \in M : f(m) = n\}$ das Bild von f .

Lemma 2.2. Universelle Eigenschaft des Kern und des Cokerns

- a) Für jede Abbildung $g : L \rightarrow M$ mit $f \circ g = 0$ gibt es eine eindeutige Abbildung $h : L \rightarrow \ker f$ s.d. $g = \iota \circ h$.



- b) Auch die duale Aussage gilt: Für jede Abbildung $g : N \rightarrow L$ mit $g \circ f = 0$ gibt es eine eindeutige Abbildung $h : L \rightarrow \text{coker } f$ s.d. $g = h \circ \pi$.



Beweis:

- a) Existenz von h : Sei $l \in L$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung: $f(g(l)) = 0$, also $g(l) \in \ker f$. Dann liefert $h(l) := g(l)$ die gewünscht Abbildung $L \rightarrow \ker f$. Da g R -linear ist, ist auch h R -linear.
- Eindeutigkeit von h : Angenommen es gibt ein $\tilde{h} \neq h$ mit den obigen Eigenschaften, dann $\exists l \in L$ mit $\tilde{h}(l) \neq h(l)$, also $\iota(\tilde{h}(l)) \neq g(l)$ \downarrow .

- b) Existenz von h: Sei $r \in \text{coker } f$ wähle eine Hochhebung n von r (d.h. ein $n \in N$ mit $\pi(n) = r$) und definiere $h(r) = g(n)$. Die Abbildung h ist wohldefiniert, denn seien $n, n' \in N$ mit $\pi(n) = r$ und $\pi(n') = r$

$$\begin{aligned} \pi R\text{-linear} & \Rightarrow \pi(n - n') = 0 \\ & \Rightarrow n - n' \in \ker \pi \\ \text{Def. von Cokern} & \Rightarrow n - n' \in \text{im } f \\ \text{n.V.} & \Rightarrow g(n) - g(n') = g(n - n') = 0 \end{aligned}$$

also $h(r) = g(n) = g(n') = h(r)$.

Existenz von h Angenommen $\tilde{h} \neq h$, dann $\exists r \in \text{coker } f$ mit $\tilde{h}(r) = h(r)$. Wähle eine Hochhebung n von r unter π , dann gilt $\tilde{h}(\pi(x)) \neq h(\pi(x))$, dies steht aber im Widerspruch zu $h \circ \pi = g = \tilde{h} \circ \pi$.

□

Definition 2.3. *Kettenkomplex* Ein Kettenkomplex $C = C_* = (C_*, d)$ ist eine Familie von Objekten $C_* = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ zusammen mit Abbildungen $d = d_n : C_n \rightarrow C_{n-1} \forall n \in \mathbb{Z}$ s.d. $d \circ d = d^2 = d_{n-1} \circ d_n = 0$. Diese Abbildungen d_n heißen Differentiale.

- a) $Z_n(C_*) := \{c \in C_n \mid dc = 0\} = \ker d_n$ heißen n-Zykel des Kettenkomplexes.
 b) $B_n(C_*) := \{c \in C_n \mid \exists c' \in C_{n+1} : dc' = c\} = \text{im } d_{n+1}$ heißen n-Ränder des Kettenkomplexes.

Schreibe Kettenkomplexe auch so:

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots$$

Lemma 2.4. *Für einen Kettenkomplex C sind $Z_n(C)$ und $B_n(C)$ R -Untermoduln von C_n und es gilt $B_n(C) \subseteq Z_n(C) \subseteq C_n$*

Beweis: $B_n(C)$ und $Z_n(C)$ sind R -Untermoduln, da d_n und d_{n+1} R -linear sind. Da $B_n(C) = \text{im } d_{n+1}$ und $Z_n(C) = \ker d_n$ folgt mit der Eigenschaft ($d_n \circ d_{n+1} = 0$) der Differentiale $B_n(C) \subseteq Z_n(C)$. $Z_n(C) \subseteq C_n$ ist klar, da $Z_n(C) = \ker d_n \subseteq C_n$.
 □

Beispiel 2.5. a) ...

b) ...

c) Sei $R = \mathbb{Z}$, dann ist

$$0 \xrightarrow{id} \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/6 \xrightarrow{0} 0$$

ein Kettenkomplex, da $2 \cdot 3 = 6 \equiv_6 0$ Es gilt:

$$\begin{aligned} H_2(C_*, d) &= \frac{Z_2(C)}{B_2(C)} = \frac{\ker(\mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 6} \mathbb{Z}/6)}{\text{im}(0 \rightarrow \mathbb{Z}/6)} \cong \frac{\mathbb{Z}/2}{0} = \mathbb{Z}/2 \\ H_1(C_*, d) &= \frac{Z_1(C)}{B_1(C)} = \frac{\ker(\mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/6)}{\text{im}(\mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/6)} \cong \frac{\mathbb{Z}/3}{\mathbb{Z}/3} = 0 \\ H_0(C_*, d) &= \frac{Z_0(C)}{B_0(C)} = \frac{\ker(\mathbb{Z}/6 \rightarrow 0)}{\text{im}(\mathbb{Z}/6 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/6)} \cong \frac{\mathbb{Z}/6}{\mathbb{Z}/2} = \mathbb{Z}/3 \end{aligned}$$

d) Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit und $\Omega^n(X)$ der \mathbb{R} -Vektorraum der n -Formen auf X . Dann gibt es Abbildungen

$$d : \Omega^n(X) \rightarrow \Omega^{n+1}(X)$$

wobei $d \circ d : \Omega^n(X) \rightarrow \Omega^{n+2}(X)$ die Nullabbildung ist. Nach Umindizierung erhalten wir einen Kettenkomplex. Dies ist der sogenannte de Rahm-Komplex von X und seine Homologie ist die deRahm Kohomologie von X :

$$H_{d\mathbb{R}}(X, \mathbb{R}) := H_*(\Omega^*, d)$$

(eigentlich ist das ein Kokettenkomplex)

Definition 2.7. Seien (C_*, d^C) und (D_*, d^D) Kettenkomplexe. Ein Morphismus von Kettenkomplexen

$$f_* : (C_*, d^C) \rightarrow (D_*, d^D)$$

ist eine Familie von Abbildungen $f_n : C_n \rightarrow D_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ mit

$$d^D f_n = f_{n-1} d^C \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

also so, dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{d_n^C} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_n & \xrightarrow{d_n^D} & D_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Wir erhalten so die Kategorie der Kettenkomplexe von R -Moduln, die wir mit $Ch(R - \text{Mod})$ bezeichnen.

Lemma 2.8. Jeder Morphismus $f : (C_*, d^C) \rightarrow (D_*, d^D)$ induziert Abbildungen $Z_n(C) \rightarrow Z_n(D)$, $B_n(C) \rightarrow B_n(D)$ und $H_n(C) \rightarrow H_n(D) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Sei $c \in Z_n(C)$, also $d_n^C c = 0$. Dann gilt $d^D f_n(c) = f_{n-1} d^C c = f_{n-1}(0) = 0$

□ **TODO:**
Weitermachen

- 3 Simpliziale Homologie
- 4 Simpliziale Mengen
- 5 Singuläre Homologie
- 6 H_1 und π_1
- 7 Homotopieinvarianz der singulären Homologie
- 8 Relative singuläre Homologie, Ausschneidung und Mayer-Vietoris

Definition 8.1. Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ ein Unterraum. Dann sei

$$C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A)$$

wobei die Injektive Abbildung $C_n(A) \rightarrow C_n(X)$ durch Anwenden von C_n auf $i : A \rightarrow X$ gegeben ist. Da Cokern ein Funktor ist erhalten wir Abbildungen $d : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$ und weil $d^2 = 0$ auf $C_*(X)$ ist auch $C_*(X, A)$ ein Kettenkomplex. Die relative singuläre Homologie eines Raumpaares (X, A) ist definiert durch

$$H_*(X, A) := H_*(C_*(X, A))$$

Für $A = \emptyset$ ist $H_*(X, \emptyset) = H_*(X)$ und für $A = X$ ist $H_*(X, X) = 0$.

Korollar 8.2. Für jedes Raumpaar (X, A) gibt es eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_A} H_n(X, A) \xrightarrow{d} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \dots$$

Beweis: Nach Definition ist $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz in $Ch(\underline{Ab})$. Anwenden von Proposition 2.15 liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 8.3. • Wir werden untersuchen für welche Raumpaares Isomorphismen $H_*(X, A) \cong H_*(X/A)$ existieren

- Theorem 7.6 läßt sich auf Raumpaares $f \text{ rel } g : (X, A) \xrightarrow{\cong} (Y, B) \Rightarrow H_*(f) = H_*(g)$ verallgemeinern. Der Beweis ist völlig analog.

Theorem 8.4. (Ausschneidung) Sei X ein beliebiger topologischer Raum und $U, V \subset X$ Unterräume, s.d. $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$ (z.B. U, V offen und $X = U \cup V$). Dann induziert die Abbildung von Raumpaaren $(V, U \cap V) \hookrightarrow (X, U)$ einen Isomorphismus $H_*(V, U \cap V) \xrightarrow{\cong} H_*(X, U)$ von relativen Homologiegruppen.

Äquivalente Formulierung: (setze $Z := X - V$) Seien $Z \rightarrow U \rightarrow X$ Inklusionen mit $\bar{Z} \subset \overset{\circ}{U}$ (z.B. Z abgeschlossen und U offen). Dann induziert $(X - Z, U - Z) \rightarrow (X, U)$ einen Isomorphismus von relativen Homologiegruppen $H_*(X - Z, U - Z) \xrightarrow{\cong} H_*(X, U)$

Korollar 8.5. („Mayer-Vietoris“): Sei X ein topologischer Raum und $U, V \subset X$ offen mit $X = U \cup V$. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{(H_*(i_{U \cap V}^U) \rightarrow H_*(i_{U \cap V}^V))} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_*(i_U^X) \\ -H_*(i_V^X) \end{pmatrix}} H_n(X) \xrightarrow{d} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Beweis: [aus dem Ausschneidungssatz]: Betrachte folgendes Diagramm: TODO
daraus ergibt sich folgende lange exakte Sequenz TODO \square

9 Baryzentrische Unterteilung und der fehlende Beweis

Definition 9.1. a) Wir definieren $u_q \in C_q(\Delta_{top}^q)$ induktiv wie folgt:

$$u_0 = e_0, \quad u_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i p_q * C_{q-1}(\tilde{d}_i) \underbrace{\underbrace{(u_{q-1})}_{\in C_{q-1}(\Delta_{top}^{q-1})}}_{\in C_{q-1}(\Delta_{top}^q)} \in C_q(\Delta_{top}^q)$$

wobei p_q der Mittelpunkt von Δ_{top}^q und

$$p_q * : C_{q-1}(\Delta_{top}^q) \rightarrow C_q(\Delta_{top}^q)$$

die Abbildung aus ?? ist.

TODO:
BSP

b) Für $c = \sum_i n_i \sigma_i \in C_q(X)$, $\sigma_i : \Delta_{top}^q \rightarrow X$ sei $Bc = \sum_i n_i C_q(\sigma_i)_{(u_q)}$ wobei $C_q(\sigma)$ die durch $\sigma : \Delta_{top}^q \rightarrow X$ induzierte Abbildung. Man erhält:

$$B(id_q) = u_q : \Delta_{top}^q id_0 \rightarrow \Delta_{top}^q$$

Lemma 9.2. a) $\forall f : X \rightarrow Y$ stetig: $C_q(f) \circ B^X = B^Y \circ C_q(f)$

b) $B_* : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ ist eine Kettenabbildung

c) $B \cong Id : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$

10 Erste Anwendung der singulären Homologie

Satz 10.1.

$$H_n(\mathbb{S}^d) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = d = 0 \\ \mathbb{Z} & n = 0, d > 0 \\ \mathbb{Z} & n = d > 0 \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Äquivalente Formulierung: $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^d) \cong \delta_{dn}\mathbb{Z}$.

Beweis: Da $\mathbb{S}^0 = \{pkt\} \vee \{pkt\}$ ist $H_0\{\mathbb{S}^0\} = \mathbb{Z}^2$ klar. Da \mathbb{S}^d für $d \geq 1$ zusammenhängend ist, ist auch $H_0(\mathbb{S}^d) \cong \mathbb{Z}$ schon bekannt. \square

TODO: w

Bemerkung 10.2. 10.1 verallgemeinert sich zu einem Isomorphismus

$$H_{q+1}(SX) \xrightarrow{\cong} H_q(X) \quad \forall q \geq 1$$

TODO:
Übung

Theorem 10.3.

$$f : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \Rightarrow m = n$$

Beweis: f induziert eine Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{f(0)\}$, die wiederum ein Homomorphismus ist. Es ist $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong \mathbb{S}^{m-1}$ und $\mathbb{R}^n - \{f(0)\} \cong \mathbb{S}^{n-1}$. Also induziert \tilde{f} eine Homotopieäquivalenz $\mathbb{S}^{m-1} \xrightarrow{\cong} \mathbb{S}^{n-1}$ also nach Homotopieäquivalenz einen Isomorphismus $H_*(\mathbb{S}^{m-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(\mathbb{S}^{n-1})$. Mit 10.1 folgt $m = n$. \square

Bemerkung 10.4. 10.3 lässt sich zu Homöomorphismen von Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Dazu:

Definition 10.5. Sei $x_0 \in X$ dann heißt $H_n(X, X - \{x_0\})$ die n -te lokale Homologiegruppe von X in x_0 .

Satz 10.6. Sei $A \subset X$ ein Deformationsretrakt. Dann ist $H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$ ein Isomorphismus und $H_*(X, A) = 0$.

Beweis: Da A ein Deformationsretrakt ist gibt es eine Homotopie $A \xrightarrow{\cong} X$ darum gibt es wegen einen Isomorphismus $H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$. Wegen der langen exakten Sequenz eines Raumpaars 8.2 folgt daraus $H_*(X, A) = 0$. \square

TODO:
ref 7.8

Satz 10.7. a) $\mathbb{S}^n \not\prec \{pkt\}$

b) \mathbb{S}^{n-1} ist nicht Deformationsretrakt der Vollkugel

TODO:
not
homotop
fixen

Beweis:

a) 10.3 und ??

b) $D^n \simeq \{pkt\}$ wie oben

□

Theorem 10.8 (Browserscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ hat mindestens einen Fixpunkt*

Beweis: Definiere $g : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ wie folgt. Strahl von $f(x)$ nach x schneidete, unter der Annahme, dass f keinen Fixpunkt hat, genau in einem Punkt \mathbb{S}^{n-1} . Dieser sei $g(x)$. Man erhält also eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} g : D^n &\rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

und $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und g ist invers zur Inklusion $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow D^n$ bis auf Homotopie. Also ist \mathbb{S}^{n-1} Deformationsretrakt von D^n im Widerspruch zu 10.7. □

Bemerkung 10.9. *Anstatt $H_q(\mathbb{S}^n)$ kann man natürlich auch*

$$\pi_q(\mathbb{S}^n) := Hom_{Ho(Top.)}((\mathbb{S}^q, pkt), (\mathbb{S}^n, pkt))$$

betrachten. Diese sind viel schwieriger zu berechnen und im Allgemeinen bis heute unbekannt. Es gibt nämlich Elemente in $\pi_q(\mathbb{S}^n)$ für $q \neq n$.

Bsp (Hopf-Abbildung)

TODO:
Diagramm

Definition 10.10. *Sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetige Abbildung und $[\mathbb{S}^n]$ eine Fundamentalklasse. Dann ist der Abbildungsgrad definiert durch*

$$\deg(f) = k \in \mathbb{Z}$$

wobei k die eindeutige ganze Zahl mit $H_n(f)[\mathbb{S}^n] = k[\mathbb{S}^n]$ ist.

Bemerkung 10.1. • Für $n = 1$ ist das äquivalent zur entsprechenden Definition mit der Fundamentalgruppe π_1 aus dem letzten Semester.

- $\deg(f)$ ist unabhängig von der Wahl der Fundamentalklasse. Dies liegt daran, dass jeder Gruppenhomomorphismus $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $\alpha(1)$ vollständig bestimmt ist.

Lemma 10.11. *Für $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ gilt*

a) $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$

b) falls $f \simeq g$, dann gilt $\deg(f) = \deg(g)$

Beweis: klar □

Satz 10.12. Für die Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ gegeben durch $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ gilt $\deg(f) = -1$.

Beweis: Mit vollständige Induktion nach n :

$n = 1$: mit $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \pi_1(\mathbb{S}^1)^{ab} = H_1(\mathbb{S}^1)$ klar.

$n - 1 \rightarrow n$: Sei $\mathbb{S}^n = U \cup V$ Überdeckung wie im Beweis von 10.1.

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(\mathbb{S}^n) & \xleftarrow{\cong_{l.e.S}} & H_n(\mathbb{S}^n, V) & \xleftarrow{\cong_{Auss.}} & H_n(U, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\cong_{l.e.S}} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\
 H_n(f) \downarrow & & H_*(f) \downarrow & & H_*(f) \downarrow & & H_*(f) \downarrow \\
 H_n(\mathbb{S}^n) & \xleftarrow{\cong_{l.e.S}} & H_n(\mathbb{S}^n, U) & \xleftarrow{\quad} & H_n(V, \mathbb{S}^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})
 \end{array}$$

In diesem Diagramm entspricht die rechte Abbildung einer Multiplikation mit (-1) . Somit tut dies auch die Linke. (Die Spiegelung sollte eine andere Koordinatenachse spiegeln als für die Überdeckung verwendet wird)

TODO:
□ Fußnote für Überdeckung

Korrolar 10.13. Für die Abbildung $a : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ gegeben durch $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, \dots, -x_n)$ (die Antipodenabbildung) gilt $\deg(a) = (-1)^{n+1}$

Beweis: a ist Komposition von $n + 1$ Abbildungen wie in 10.12 □

Satz 10.14. Sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ stetig und ohne Fixpunkt, so ist $f \simeq a$ (aus 10.13). Es gilt dann $\deg(f) = (-1)^{n+1}$

Beweis: Betrachte $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \mathbb{S}^n$ gegeben durch

$$H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) - tx}{|(1-t)f(x) - tx|}$$

ist stetig und

$$\begin{aligned}
 H(x, 0) &= \frac{f(x)}{|f(x)|} \\
 H(x, 1) &= \frac{-x}{|-x|} = -x = a(x)
 \end{aligned}$$

(der Nenner ist ungleich 0, da f keinen Fixpunkt hat). Die Aussage über $\deg(f)$ folgt aus 10.13. □

Korrolar 10.15. Sei $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ eine stetige Abbildung ohne Antipodenpunkt (d. h. ohne x mit $f(x) = -x$), dann gilt $f \simeq id$, also $\deg(f) = 1$.

Beweis: Betrachte als Abbildung für 10.14: $a \circ f$. □

Korollar 10.16. *Für jedes gerade n hat jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ einen Fixpunkt oder einen Antipodenpunkt.*

Beweis: Angenommen f hat weder Fix- noch Antipodenpunkt, dann folgt aus 10.14, dass $\deg(f) = (-1)^{n+1} = -1$ und aus 10.15, dass $\deg(f) = 1$ □

Auf jeder glatten Mannigfaltigkeit M gibt es das sogenannte „Tangentialbündel“ $\pi : M \rightarrow TM$, wobei $\forall p \in \pi^{-1}(p)$ ein Vektorraum mit gleicher Dimension $\dim(M)$, der dem Tangentialraum an $a \in M$ entspricht. Ein tangentes Vektorfeld ist ein „Schnitt“ von π . Wir verwenden im Spezialfall $M = \mathbb{S}^n$ die folgende einfache Definition.

Definition 10.17. *Ein tangentes Vektorfeld auf \mathbb{S}^n ist eine stetige Abbildung $V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ s.d. $\forall x \in \mathbb{S}^n$ gilt, dass x und $V(x)$ bzgl. des Standard-Skalarproduktes des \mathbb{R}^{n+1} orthogonal sind.*

Satz 10.18. a) *Für jedes gerade $n \in \mathbb{N}$ hat jedes tangente Vektorfeld auf \mathbb{S}^n eine Nullstelle*

b) *Für ungerade $n \in \mathbb{N}$ gibt es tangente Vektorfelder auf \mathbb{S}^n ohne Nullstellen*

Beweis:

a) Ist $V : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ wie oben und ohne NST, so ist $x \mapsto \frac{V(x)}{|V(x)|}$ eine stetige Selbstabbildung der \mathbb{S}^n ohne Fix- oder Antipodenpunkt (da V ein tangentes Vektorfeld ist), dies steht im Widerspruch \Downarrow zu 10.16.

b) Die Abbildung $(x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{2m}, -x_{2m-1})$ ist ein tangentes Vektorfeld ohne Nullstelle. □

Anschaulich Diese Aussage ist eng mit dem Satz verknüpft, dass es nur in den Dimensionen 1, 2, 4 und 8 reelle Divisionsalgebren gibt ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$), siehe dazu [1, Hirzebruch - Zahlen]

Satz 10.19 (Hopf'sche Spurformel). *Sei $f_* : C_* \rightarrow C_*$ eine Abbildung eines endlich erzeugten Kettenkomplexes in k -Mod (d.h. glaube ich, dass nur endlich viele $C_* \neq 0$ und jedes davon endlich erzeugt ist) wobei k ein Körper ist. Dann gilt*

$$\sum (-1)^q \text{Tr}(f_q) = \sum (-1)^q \text{Tr}(H_q(f))$$

(wobei Tr die Spur ist).

Beweis: Es gibt induzierte Abbildungen auf $Z_q(f) : Z_q(C) \rightarrow Z_q(C)$ und $B_q(f) : B_q(C) \rightarrow B_q(C)$, da $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$ und alles k -Vektorraum sind gilt:

$$Z_q(C) \cong B_q(C) \oplus H_q(C)$$

also

$$Tr(Z_q(f)) = Tr(B_q(f) \oplus H_q(f)) = Tr(B_q(f)) + Tr(H_q(f))$$

Ausserdem ist

$$0 \rightarrow Z_q(C) \rightarrow C_q \rightarrow B_{q-1}(C) \rightarrow 0$$

eine spaltende kurze exakte Sequenz (da $C_q = Bild(d) + Ker(d) = B_n + Z_n$) also $Tr(f_q) = Tr(Z_q(f)) + Tr(B_q(f))$. Zusammen ergibt das $Tr(f_q) = Tr(B_{q-1}) + Tr(B_q(f)) + Tr(H_q(f))$ mit $(-1)^q$ multipliziert und aufsummiert über q :

$$\sum (-1)^q Tr(f_q) = \sum (-1)^q Tr(H_q(f))$$

□

Diese Formel ist wichtig für den Beweis des Lefschetz Fixpunktsatzes.

Theorem 10.20. *Lefschetzer Fixpunktsatz Sei $f : X \rightarrow X$ eine stetige Selbstabbildung eines Polyeders (d.h. Realisierung eines endlichen Simplicialkomplexes) ohne Fixpunkte. Dann gilt*

$$\lambda(f) := \sum_{q=0}^n (-1)^q Tr(H_q(f)) = 0$$

Beweis: (nur Idee) Wenn f keinen Fixpunkt hat, so wird jeder Punkt aus X um ein kleines Stück verschoben. Also kann eine Triangulierung von X mit sehr kleinem Simplex wählen s.d. $\sigma \cap f(\sigma) = \emptyset$ falls f simplicial. Im Allgemeinen kann man f bis auf Homotopie so abändern, dass es zu einer simplicialen Abbildung wird.

$$\Rightarrow \underbrace{Tr(C_q(f))}_{\text{simplicialer Kettenkomplex}} = 0 \xrightarrow{\text{Hopf'sche Spurformel}} \lambda(f) = 0$$

□

Bemerkung 10.21. a) Falls $X \simeq \{pkt\}$ so gilt

$$\begin{aligned} H_q(X) &= \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \Rightarrow Tr(H_q(f)) &= \begin{cases} 1 & q = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \Rightarrow \lambda(f) &= 1 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{10.20}$ f hat Fixpunkt (Verallgemeinerung des Browserschen Fixpunktsatzes)

b) die Umkehrung gilt nicht z.B. $X = \mathbb{S}, f = id$

$$Tr(H_q(id_{\mathbb{S}})) = \begin{cases} 1 & q = 0, 1 \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda(id_{\mathbb{S}}) = 0$$

Theorem 10.22. Sei $B \approx D^r$ ein r -dimensionaler Ball

a) Sei $B \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ eine Einbettung. Dann ist

$$H_q(\mathbb{S}^n - B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathbb{S}^n - B$ wegzusammenhängend.

b) Sei $B \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung. Dann ist

$$H_q(\mathbb{R}^n - B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n - 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere ist $\mathbb{R}^n - B$ wegzusammenhängend.

Beweis: Die Aussagen über den Wegzusammenhang folgen direkt aus $H_0() \cong \mathbb{Z}$

a) Induktion nach r

$r = 0$: Es ist $\mathbb{S}^n - B \cong \mathbb{R}^n \approx \{pkt\}$, also stimmt die Aussage, da

$$H_q(\{pkt\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

$r - 1 \rightarrow r$: Sei die Aussage für $r - 1$ schon bewiesen, dann definiere

$$z \begin{cases} \in Z_q(\mathbb{S}^n - B) & q > 0 \\ = x - y \in Z_0(\mathbb{S}^n - B) & q = 0 \text{ für } x, y \in \mathbb{S}^n - B \end{cases}$$

Beh.: Es gibt ein $b \in C_{q+1}(\mathbb{S}^n - B)$ mit $db = z$ (dies ist äquivalent zur Aussage (a) für die Homologiegruppen)

$$\begin{array}{lll} q > 0 : \text{Beh.} & \Leftrightarrow & Z_q(\mathbb{S}^n - B) = B_q(\mathbb{S}^n - B) \\ & \Leftrightarrow & H_q(\mathbb{S}^n - B) = 0 \\ q = 0 \text{ Beh.} & \omega : \Leftrightarrow & C_0(\mathbb{S}^n - B) \rightarrow \mathbb{Z} \end{array}$$

□

Literatur

- [1] F. E. P. Hirzebruch. Zahlen. Springer Berlin, 1993.
- [2] C. A. Weibel. An introduction to homological algebra. Cambridge studies in advanced mathematics, 1994.